

Ліганенко В.В. Державний університет інфраструктури та технологій, старший викладач кафедри судноводіння та експлуатації технічних систем на водному транспорті, м.Ізмаїл

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОРМИ ФУНКЦІЇ СПЕКТРАЛЬНОГО ВІКНА ВУЗЬКО-СМУГОВИХ ФІЛЬТРІВ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Постановка проблеми. Точність апаратного спектрального аналізу випадкових сигналів, які характеризують дефект (несправність) двигунів засобів водного транспорту, заснованих на використанні вузько-смугової фільтрації, у значній мірі визначається відмінністю АЧХ вузько-смугового фільтра від ідеальної – прямокутної. При ідеальному спектральному вікні забезпечується повне усунення похибки «розмивання», або «перетікання» спектра. Однак ідеальне спектральне вікно фізично не піддається реалізації.

У зв'язку з цим великий практичний інтерес представляє задача оптимізації, що полягає у визначенні форми АЧХ $\Phi(\omega)$ або однозначно пов'язаної з ним перетворюючої функції $H(\tau)$.

Ці функції забезпечують максимальну точність (мінімальну похибку) апроксимації ідеального спектрального вікна $\Phi_0(\omega)$ при заданих значеннях смуги пропускання $\Delta\omega$, часу вимірювання (аналізу) T і відносної дисперсії оцінки СЩП [1]:

$$\Phi(\omega) = \chi\left(\omega_0 - \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(\omega_0 + \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(-\omega_0 - \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(-\omega_0 + \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$$

Розглянемо розв'язання цієї задачі для методу безпосередньої фільтрації та кореляційно-фільтрового методу вимірювання оцінок СЩП.

Мета статті – навести метод оптимізації форми функції спектрального вікна вузько-смугових фільтрів для спектрального аналізу випадкових сигналів,

які характеризують дефект (несправність) двигунів засобів водного транспорту. Провести дослідження можливостей реалізації оптимальних функцій спектрального вікна при застосуванні динамічних фільтрів малих порядків. Отримані співвідношення для оцінки математичного очікування та дисперсії оцінок спектральної щільності потужності при використанні динамічних фільтрів для контролю технічного стану двигунів засобів водного транспорту.

Методи оптимізації форми АЧХ вузько-смугових фільтрів для спектрального аналізу випадкових сигналів отримуємо для двох критеріїв [8]:

- мінімуму середньоквадратичної похибки апроксимації ідеальної, прямокутної ФСВ реальної функцією;
- мінімуму впливу бічних пелюсток ФСВ на похибку вимірювання оцінки СЩП.

Використання зазначених критеріїв обумовлено двома можливими постановками задачі оптимізації.

У першому випадку (перша задача оптимізації) основною вимогою, що висувається до оптимальної АЧХ фільтра, є забезпечення мінімуму середньоквадратичної похибки апроксимації ідеальної АЧХ, але при цьому не накладається ніяких обмежень на поведінку АЧХ як у смузі аналізу, так і поза нею.

У другому випадку (друга задача оптимізації) основна увага приділена забезпеченню мінімуму впливу бічних пелюсток ФСВ на похибку вимірювання оцінки СЩП. Ці дві задачі оптимізації охоплюють найбільш поширені вимоги, що висуваються до ФСВ при вирішенні практичних завдань синтезу вузько-смугових фільтрів, які використовуються в апаратурі спектрального аналізу випадкових сигналів [1].

Сформулюємо та вирішимо обидві задачі оптимізації АЧХ вузько-смугових фільтрів для спектрального аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Метод оптимізації функції спектрального вікна вузько-смугових

фільтрів за мінімумом середньоквадратичної похибки апроксимації при вимірюванні оцінки спектральної щільності потужності

Задача оптимізації АЧХ вузько-смугового фільтра $\Phi(\omega)$ за середньоквадратичним критерієм формулюється так: знайти оптимальну перетворюючу функцію $H_{\text{опт}}(\tau)$ або оптимальну імпульсну перехідну характеристику $h(\tau)$ фільтра, що забезпечують мінімум функціоналу [1]

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\omega) - \Phi_0(\omega)]^2 d\omega, \quad (1)$$

де $\Phi_0(\omega)$ – ідеальна (необхідна) спектральна функція (або АЧХ) фільтра. У нашому випадку ця функція прямокутна та аналітично описується виразом [2, 3]:

$$\Phi_0(\omega) = \begin{cases} \text{const}, & \text{при } \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}; \\ 0, & \text{при інших значеннях } \omega. \end{cases} \quad (2)$$

Функція $\Phi(\omega)$ визначається наступною рівністю:

$$\Phi(\omega) = \int_0^T H(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad 0 < \tau < T. \quad (3)$$

Для розв'язання задачі оптимізації скористаємося варіаційним методом, відповідно до якого повинна виконуватися умова:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial H(\tau)} = 0.$$

Тоді зі співвідношення (1) обчислимо:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial H(\tau)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\omega) - \Phi_0(\omega)] \frac{\partial \Phi(\omega)}{\partial H(\tau)} d\omega. \quad (4)$$

З урахуванням формули (3) знаходимо:

$$\frac{\partial \Phi(\omega)}{\partial H(\tau)} = \begin{cases} \cos \omega \tau, & 0 < \tau < T; \\ 0, & \tau > T. \end{cases}$$

Підставляючи цю рівність у вираз (4), отримаємо:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial H(\tau)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\omega) - \Phi_0(\omega)] \cos \omega \tau d\omega, \quad 0 < \tau < T. \quad (5)$$

Прирівнюючи вираз (5) нулю, маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\omega) - \Phi_0(\omega)] \cos \omega \tau d\omega = 0, \quad 0 < \tau < T. \quad (6)$$

Оскільки, відповідно до перетворення Фур'є,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \pi H(\tau),$$

то з виразу (6) отримаємо:

$$\pi H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

З урахуванням рівності (4), знаходимо:

$$H_{\text{оп}}(\tau) = A \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos \omega \tau d\omega, \quad (7)$$

де $A = \frac{\Phi_0}{\pi} = \text{const}$ – постійна.

Після обчислень з формули (7), отримаємо:

$$H_{\text{опт}}(\tau) = A \frac{\sin(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2})\tau - \sin(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2})\tau}{\tau} = 2A \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\tau}, \quad 0 < \tau < T. \quad (8)$$

При методі множення вимірювання оцінки СЦП функція $H_{\text{опт}}(\tau)$ може бути реалізована, якщо вибрати $\Delta\omega T = 2k\pi$, де k – будь-яке ціле число. Тоді для оптимальної імпульсної характеристики фільтра, з урахуванням рівності (8), маємо:

$$h_{\text{опт}}(\tau) = \frac{H_{\text{опт}}(\tau)}{T - \tau} = 2A \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\tau(T - \tau)}. \quad (9)$$

У той же час для методу вимірювання оцінки СЦП, заснованого на зведенні в квадрат фільтрованої реалізації випадкового сигналу, оптимальна функція перетворення $H_{\text{опт}}(\tau)$ не може бути реалізована, так як рівняння

$$H_1(u) = 2 \int_0^T h(\tau) h(\tau - u) (T - u) d\tau,$$

при $H_1 = H_{\text{опт}}$, не має рішення для $h(\tau)$. Якісно це видно хоча б з того, що функція $\Phi_1(\omega) > 0$, а перетворення Фур'є від $H_{\text{опт}}(\tau)$ може приймати і негативні значення [4].

2. Метод оптимізації функції спектрального вікна вузько-смугових фільтрів за мінімумом впливу бічних пелюсток на точність вимірювання оцінки спектральної щільності потужності

Сформулюємо та розв'яжемо другу задачу оптимізації АЧХ вузько-смугових фільтрів для спектрального аналізу випадкових сигналів – за

мінімумом впливу бічних пелюсток спектральної (частотної) характеристики фільтра $\Phi(\omega)$ при заданій дисперсії. Потім проведемо порівняльний аналіз результатів для обох задач оптимізації АЧХ вузько-смугових фільтрів.

Переходимо до розв'язання другої задачі оптимізації, сформульованої вище.

Внесок від бічних пелюсток ФСВ $\Phi(\omega)$ визначимо наступним виразом:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}} \Phi(\omega) d\omega + \int_{-\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}} \Phi(\omega) d\omega + \int_{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega - 2 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \Phi(\omega) d\omega = \text{Th}(0) - 2 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \Phi(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, оптимізація вкладу бічних пелюсток функції $\Phi(\omega)$ у похибку вимірювання оцінки СЦП зводиться до забезпечення мінімуму різниці в правій частині виразу (10).

При заданій передавальній функції, тобто при $h(0) = \text{const}$, найменше значення вкладу від бічних пелюсток у похибку вимірювання оцінки СЦП досягається за умови, що значення $\int_{\Delta\omega} \Phi(\omega) d\omega$ максимальне. Однак зменшення

цього вкладу призводить до збільшення дисперсії оцінки СЦП [4].

Наприклад, для локальної оцінки $\Phi(\omega)$ внесок від бічних пелюсток дорівнює нулю, але функція необмежено велика.

Тому, коректною у даному випадку є постановка задачі оптимізації на умовний екстремум: знайти оптимальну імпульсну перехідну характеристику $h(\tau)$ вузько-смугового фільтра, що забезпечує мінімум вкладу від бічних пелюсток у похибку вимірювання оцінки СЦП за умови, що відносна дисперсія оцінки СЦП не перевищує заданого значення.

Для розв'язання цієї задачі її більш зручно сформулювати наступним чином: визначити імпульсну характеристику фільтра $h(\tau)$, що забезпечує максимум величиною $\int_{\Delta\omega} \Phi(\omega) d\omega$ за умови, що

$$\int_0^T (T - \tau) h^2(\tau) d\tau \leq L = \text{const}.$$

Таке завдання на умовний екстремум вирішується методом Лагранжа [2, 3]. Введемо функціонал

$$\Gamma' = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \Phi(\omega) d\omega - \lambda \int_0^T (T - \tau) h^2(\tau) d\tau, \quad (11)$$

де λ – множник (або коефіцієнт) Лагранжа.

Використовуючи формулу (9), обчислимо часткову похідну $\partial\Gamma'/\partial h(\tau)$ і прирівняємо її до нуля

$$\frac{\partial\Gamma'}{\partial h(\tau)} = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{\partial\Phi(\omega)}{\partial h(\tau)} d\omega - 2\lambda(T - \tau)h(\tau) = 0, \quad (12)$$

де $\frac{\partial\Phi(\omega)}{\partial h(\tau)}$ з урахуванням співвідношень (3) і (2) визначається рівністю:

$$\frac{\partial\Phi(\omega)}{\partial h(\tau)} = (T - \tau) \cos \omega T, \quad 0 < \tau < T. \quad (13)$$

Вирішуючи рівняння (12) з урахуванням рівності (13), аналогічно (8), отримуємо вираз для імпульсної характеристики фільтра

$$h'_{\text{опт}}(\tau) = A' \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos \omega \tau d\omega = 2A' \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\tau}, \quad (14)$$

де $A' = \text{const}$ – постійна.

Порівнюючи оптимальні функції $h_{\text{опт}}(\tau)$, вираз (9), і $h'_{\text{опт}}(\tau)$, вираз (14), відмітимо, що в області $\tau \ll T$, вони практично збігаються. У той же час функція $h'_{\text{опт}}(\tau)$ дещо простіше реалізується технічно, ніж функція $h_{\text{опт}}(\tau)$. Тому доцільно з'ясувати, наскільки істотно відрізняються спектральні функції (АЧХ) фільтрів $\Phi(\omega)$ і $\Phi'(\omega)$, отримані за допомогою функцій $h_{\text{опт}}(\tau)$, $h'_{\text{опт}}(\tau)$, і наскільки відрізняються їх дисперсії [3].

3. Порівняльний аналіз методів оптимізації функцій спектрального вікна вузько-смугових фільтрів

Використовуючи вирази (14) і (9), введемо нормування функцій $h_{\text{опт}}(\tau)$ і $h'_{\text{опт}}(\tau)$ (постійні A і A') так, щоб $h(0) = 1$. тоді отримаємо:

$$h_{\text{опт}}(\tau) = \frac{2T}{\Delta\omega} \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\tau(T - \tau)};$$

$$h'_{\text{опт}}(\tau) = \frac{2}{\Delta\omega} \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\tau}.$$

При цьому відповідно до рівності (9), що перетворюють функції для кожного з методів оптимізації визначаються рівностями:

$$H_{\text{опт}}(\tau) = \frac{2T}{\Delta\omega} \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\tau}, \quad 0 < \tau < T; \quad (15)$$

$$H'_{\text{опт}}(\tau) = \frac{2}{\Delta\omega} (T - \tau) \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\tau}, \quad 0 < \tau < T. \quad (16)$$

Використовуючи вирази для оптимальних імпульсних характеристик і функцій перетворення, визначимо відповідні їм оптимальні спектральні характеристики (ФСВ) фільтрів $\Phi(\omega)$ і $\Phi'(\omega)$ за формулою (3).

Для визначення спектральної функції (АЧХ) $\Phi(\omega)$ підставимо в формулу (3) вираз (15), отримаємо [4]

$$\Phi(\omega) = \frac{2T}{\Delta\omega} \int_0^T \cos \omega \tau \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\tau} d\tau. \quad (17)$$

використовуючи рівність

$$\cos \omega_0 \tau \sin \frac{\Delta\omega\tau}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\omega_0 \tau + \frac{\Delta\omega\tau}{2} \right) + \sin \left(-\omega_0 \tau + \frac{\Delta\omega\tau}{2} \right) \right], \quad (18)$$

представимо співвідношення (17) у вигляді:

$$\Phi(\omega) = \Phi(\omega, \omega_0) + \Phi(\omega - \omega_0), \quad (19)$$

де

$$\Phi(\omega, \omega_0) = \frac{T}{\Delta\omega} \int_0^T \cos \omega \tau \frac{\sin \left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tau}{\tau} d\tau; \quad (20)$$

$$\Phi(\omega, -\omega_0) = \frac{T}{\Delta\omega} \int_0^T \cos \omega \tau \frac{\sin\left(-\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau}{\tau} d\tau. \quad (21)$$

Обчислимо функцію $\Phi(\omega, \omega_0)$. Застосовуючи у формулі (20) перетворення, аналогічне співвідношенню (18), знаходимо [5]:

$$\Phi(\omega, \omega_0) = \frac{T}{2\Delta\omega} \left[\int_0^T \frac{\sin\left(\omega_0 - \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau}{\tau} d\tau + \int_0^T \frac{\sin\left(\omega_0 + \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau}{\tau} d\tau \right].$$

Представимо цю функцію так:

$$\Phi(\omega, \omega_0) = \chi\left(\omega_0 - \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(\omega_0 + \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right), \quad (22)$$

де

$$\chi(\Omega) = \frac{T}{2\Delta\omega} \int_0^T \frac{\sin \Omega \tau}{\tau} d\tau, \quad (23)$$

Причому

$$\chi(-\Omega) = -\chi(\Omega). \quad (24)$$

Аналогічно з виразу (22) для функції $\Phi(\omega, -\omega_0)$, яка описується співвідношенням (21), з урахуванням рівності (24) маємо:

$$\Phi(\omega - \omega_0) = \chi\left(-\omega_0 - \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(-\omega_0 + \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right). \quad (25)$$

З урахуванням співвідношень (22) і (25) формула (19) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) = & \chi\left(\omega_0 - \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(\omega_0 + \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(-\omega_0 - \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \\ & + \chi\left(-\omega_0 + \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Перегрупувавши у виразі (26) складові, маємо [6]:

$$\Phi(\omega) = \chi\left(\omega + \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) - \chi\left(\omega + \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right) + \chi\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) - \chi\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)$$

або з урахуванням рівності (23)

$$\Phi(\omega) = \chi(\Omega_1) - \chi(\Omega_2) + \chi(\Omega_3) - \chi(\Omega_4) = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} \chi(\Omega_i), \quad (27)$$

де $\Omega_1 = \omega + \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$;

$$\Omega_2 = \omega + \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2};$$

$$\Omega_3 = \omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2};$$

$$\Omega_4 = \omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}.$$

Функцію $\chi(\Omega)$, згідно з рівністю (23), представимо у вигляді:

$$\chi(\Omega) = \frac{T}{2\Delta\omega} \int_0^T \frac{\sin \Omega \tau}{\tau} d\tau = \frac{T}{2\Delta\omega} \text{Si}(T\Omega), \quad (28)$$

$$\text{де } \text{Si}(x) = \text{si}(x) + \frac{\pi}{2}, \quad (29)$$

$$\text{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin x'}{x'} dx', \text{ при } x > 0.$$

Тоді для функції $\Phi(\omega)$ із формули (27) з урахуванням рівності (28) маємо:

$$\Phi(\omega) = \frac{T}{2\Delta\omega} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} \text{Si}(T\Omega_i),$$

або з урахуванням рівності (29)

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{T}{2\Delta\omega} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} \left[\text{si}(T\Omega_i) + \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= \frac{T}{2\Delta\omega} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} \text{si} T\Omega_i + \frac{T}{2\Delta\omega} \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} = \frac{T}{2\Delta\omega} \sum_{i=1}^4 \text{si}(T\Omega_i). \end{aligned} \quad (30)$$

Графік функції $\Phi(\omega)$ наведено на рис.1. З рисунку видно, що осциляції істотні тільки поблизу «країв» функції $\Phi(\omega)$, тобто поблизу частот $\omega = \pm\omega_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega$.

Поблизу кожної «границі» функції $\Phi(\omega)$ з чотирьох додатків у формулі (27) або (30) основний внесок дає тільки один з них – той, аргумент якого звертається в нуль у відповідній точці. Його й необхідно враховувати при обчисленні похибки вимірювання оцінки СЩП, а іншими складовими можна знехтувати [7, 8].

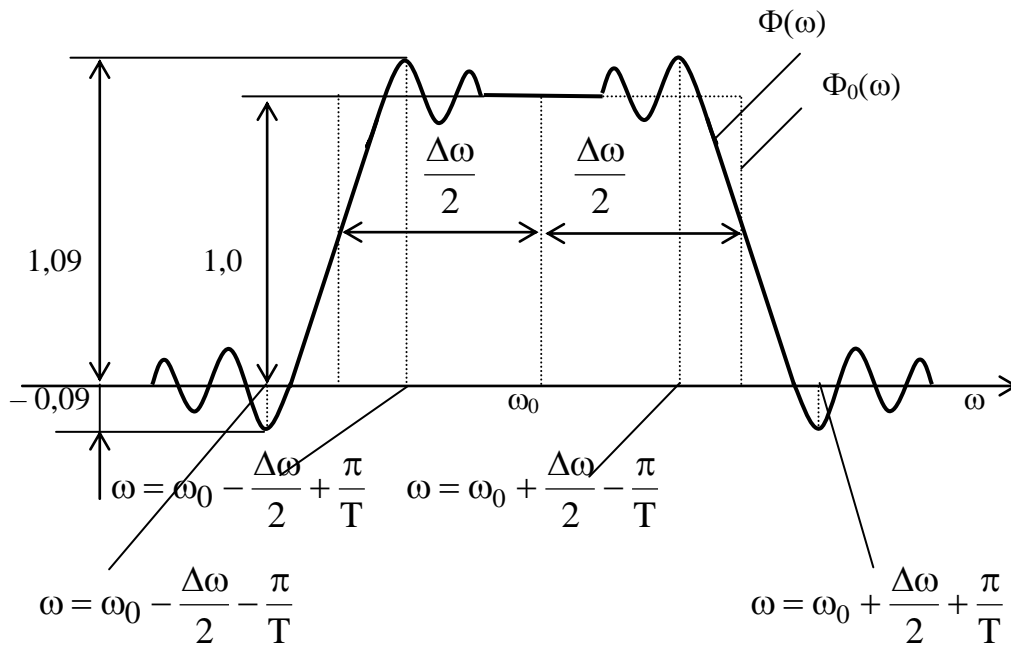


Рисунок 1 – Графік функції спектрального вікна $\Phi(\omega)$

Зазначимо, що на графіку (рис. 1) масштаб осі ω для наочності сильно перебільшений, так як при $T\Delta\omega \gg 1$ осциляції (коливання) є тільки поблизу «границь» функції $\Phi(\omega)$, на інтервалах порядку π / T .

Відзначимо також, що, якщо функцію істинної СЦП $G(x)$, а, відповідно, і інтегральний синус $\text{Si}(x)$ можна вважати приблизно постійними поблизу «границі» на інтервалах порядку $\frac{1}{T}$, тобто якщо характерний масштаб $\text{Si}(x)$ великий порівняно з величиною $\frac{1}{T}$, то осциляції взагалі не позначаються, оскільки виникає через осциляцій добуток $\Delta X(\Omega)$ – антисиметрична функція Ω . Рівень найближчого до «границі» негативного викиду (при $\Omega = \frac{\pi}{T}$) дорівнює:

$$-\frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) = -\frac{0,281}{3,14} = -0,09.$$

Усередині спектрального вікна найбільший викид (при $\Omega = -\frac{\pi}{T}$) дорівнює $(1 + 0,09) = 1,09$.

Оцінімо значення середньоквадратичного відхилення реальної функції спектрального вікна $\Phi(\omega)$ від ідеальної (прямокутної) функції $\Phi_0(\omega)$, використовуючи формулу (1) [8].

Для цього скористаємося тим, що функція $\Phi_0(\omega)$ виходить з функції $\Phi(\omega)$, відповідно до виразу (3), при $T \rightarrow \infty$. Тоді

$$\Phi(\omega) - \Phi_0(\omega) = \int_T^{\infty} H(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (31)$$

Підставляючи співвідношення (31) у формулу (1), маємо [9]:

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_T^{\infty} H(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2.$$

Уявімо цю рівність у вигляді:

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_T^{\infty} \int_T^{\infty} d\tau d\tau' H(\tau) H(\tau') \cos \omega \tau \cos \omega \tau'.$$

Приймаючи до уваги, що

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \cos \omega \tau' d\omega &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega(\tau - \tau') + \cos \omega(\tau + \tau')] d\omega = \\ &= \pi [\delta(\tau - \tau') + \delta(\tau + \tau')], \end{aligned}$$

запишемо:

$$\Gamma = \pi \int_T^{\infty} H^2(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Підставляючи у вираз (32) оптимальну перетворюючу функцію $H_{\text{опт}}(\tau)$ згідно з (15), маємо:

$$\Gamma = \frac{4\pi T^2}{(\Delta\omega)^2} \int_T^\infty \cos^2 \omega_0 \tau \frac{\sin^2 \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\tau^2} d\tau = \frac{\pi T^2}{(\Delta\omega)^2} \int_T^\infty (1 + \cos 2\omega_0 \tau)(1 - \cos \Delta\omega \tau) \frac{d\tau}{\tau^2},$$

або

$$\Gamma \approx \frac{\pi T^2}{(\Delta\omega)^2} \int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{\pi T}{(\Delta\omega)^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{T\Delta\omega}\right) \right]. \quad (33)$$

У той же час

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0^2 d\omega = 2\Phi_0^2 \Delta\omega = \frac{\pi^2 T^2}{2\Delta\omega}, \quad (34)$$

де враховано $\Phi_0 = \frac{\pi T}{2\Delta\omega}$.

Відносна середньоквадратична похибка наближення оптимальної спектральної характеристики $\Phi(\omega)$ до ідеальної характеристики $\Phi_0(\omega)$ визначається виразом [10]:

$$\delta\Gamma = \frac{\Gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0^2(\omega) d\omega}. \quad (35)$$

Після підстановки у формулу (35) рівності (33) і (34) знаходимо:

$$\delta\Gamma = \frac{2}{\pi T \Delta\omega} \left[1 + O\left(\frac{1}{T\Delta\omega}\right) \right]. \quad (36)$$

Визначимо спектральну функцію $\Phi'(\omega)$ для оптимальної перетворюючої функції $H'_{\text{опт}}(\tau)$, одержуваної при оптимізації по мінімуму бічних пелюсток і описуваної виразом (16).

Представимо функцію $\Phi'(\omega)$ у вигляді [11]:

$$\Phi'(\omega) = \int_0^T H'(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau = \int_0^T \left[H(\tau) - \frac{2}{\Delta\omega} \cos \omega_0 \tau \sin \frac{\Delta\omega \tau}{2} \right] \cos \omega \tau \, d\tau,$$

або запишемо:

$$\Phi'(\omega) = \Phi(\omega) + \Delta\Phi'(\omega), \quad (37)$$

$$\text{де } \Delta\Phi'(\omega) = -\frac{2}{\Delta\omega} \int_0^T \cos \omega_0 \tau \sin \frac{\Delta\omega \tau}{2} \cos \omega \tau \, d\tau.$$

Після перетворень, аналогічних попереднім, маємо:

$$\Delta\Phi'(\omega) = -\frac{T}{2\Delta\omega} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} \varphi(T\Omega_i), \quad (38)$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sin x' \, dx' = \frac{1 - \cos x}{x}. \quad (39)$$

З урахуванням виразів (30) і (38) формула (37) приймає вигляд [12]:

$$\Phi'(\omega) = \frac{T\pi}{2\Delta\omega} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} [\text{Si}(T\Omega_i) - \varphi(T\Omega_i)],$$

або

$$\Phi'(\omega) = \frac{T}{2\Delta\omega} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} f(T\Omega_i), \quad (40)$$

$$\text{де } f(x) = \text{Si}(x) - \frac{1 - \cos x}{x}. \quad (41)$$

Проаналізуємо поведінку функції $f(x)$. Перш за все, відзначимо, що вона має такі властивості:

а) $f(-x) = -f(x)$, тобто функція симетрична щодо нуля;

б) при $x \ll 1$ $f(x) \approx x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$;

в) при $x \gg 1$ $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x - 1}{x} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$;

г) $f'(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$.

Точки екстремуму x_l функції $f(x)$ визначимо з умови $\cos x_l = 1$, тобто $x_l = 2\pi l$, $l = 1, 2, \dots$. Ці точки є точками перегину функції $f(x)$, яка монотонно зростає, так як $f'(x) \geq 0$.

Відзначимо важливу обставину: функція $\Phi'(\omega)$ за межами вікна $\Delta\omega$ не має викидів (ні позитивних, ні негативних) і відрізняється від ідеального (прямокутного) спектрального вікна тільки поблизу «границь», в області $\sim 1/T$.

Обчислимо тепер похибку наближення оптимальної спектральної характеристики $\Phi'(\omega)$ до спектральної характеристики ідеального, прямокутного вікна $\Phi_0(\omega)$ вузько-смугового фільтра [10]. Аналогічно формулі (1) запишемо:

$$\Gamma' = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi'(\omega) - \Phi_0(\omega) \right]^2 d\omega. \quad (42)$$

Використовуючи співвідношення (3) і рівність Парсеваля вираз (42) представимо у вигляді:

$$\Gamma' = \pi \int_0^T \left[H'(\tau) - H(\tau) \right]^2 d\tau + \pi \int_T^{\infty} H^2(\tau) d\tau,$$

або

$$\Gamma' = \Gamma + \Delta\Gamma, \quad (43)$$

де функціонал Γ визначається виразом (30), а

$$\Delta\Gamma = \pi \int_0^T \left[H'(\tau) - H(\tau) \right]^2 d\tau.$$

Оскільки $\Delta\Gamma > 0$, то, як маємо із виразу (43), справедлива умова $\Gamma' > \Gamma$, що й слід було очікувати заздалегідь (з постановки задачі оптимізації).

Обчислимо величину $\Delta\Gamma$ з урахуванням рівності (15) і (16) [11]:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &= \frac{4\pi}{(\Delta\omega)^2} \int_0^T \cos^2 \omega_0 \tau \sin^2 \frac{\Delta\omega\tau}{2} d\tau = \\ &= \frac{\pi}{(\Delta\omega)^2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega_0 \tau)(1 - \cos \Delta\omega\tau) d\tau \approx \frac{\pi T}{(\Delta\omega)^2} = \Gamma. \end{aligned}$$

Тоді, відповідно до рівності (43),

$$\Gamma' = 2\Gamma ,$$

а отже,

$$\delta\Gamma' = 2\delta\Gamma . \quad (44)$$

Отже, при оптимізації спектральної характеристики вузько-смугового фільтра за мінімумом середньоквадратичної похибки апроксимації ідеального вікна (перша задача оптимізації) застосування фільтра з імпульсною характеристикою $h_{\text{опт}}(\tau)$, відповідно до виразу (9), забезпечує мінімальне середньоквадратичне відхилення $\delta\Gamma$, формула (36), форми спектральної характеристики $\Phi(\omega)$, вираз (30), від ідеальної прямокутної, але в той же час призводить до появи осциляцій, як в смузі аналізу $\Delta\omega$, так і поза нею (рис. 1) [12].

При оптимізації спектральної характеристики фільтра за мінімумом бічних пелюсток при заданій дисперсії оцінки СЦП (друга задача оптимізації) застосування фільтра із імпульсною характеристикою $h'_{\text{опт}}(\tau)$, вираз (14), забезпечує форму спектральної характеристики $\Phi'(\omega)$, формула (40), яка не має осциляцій у всьому діапазоні частот, але при цьому відносна середньоквадратична похибка апроксимації $\delta\Gamma'$ ідеального спектрального вікна збільшується вдвічі, рівність (44). Крім того, функція $h'_{\text{опт}}(\tau)$ забезпечує більш просту технічну реалізацію фільтра [13].

Відзначимо також, що відносні дисперсії оцінок СЦП $\delta\hat{G}$ і $\delta\hat{G}'$ для обох спектральних характеристик при $T\Delta\omega \gg 1$ (при цьому $\delta\Gamma, \delta\Gamma' \ll 1$) практично однакові та дорівнюють

$$\delta\hat{G} \approx \delta\hat{G}' = \frac{2\pi}{T\Delta\omega} = \frac{1}{T\Delta f} .$$

Висновки. Таким чином, у результаті постановки та розв'язання задач оптимізації вузько-смугових фільтрів для спектрального аналізу отримані їх спектральні характеристики або ФСВ, вирази (30) і (40), що дозволяють при заданих значеннях часу вимірювання T і відносній дисперсії оцінки СЦП $\delta\hat{G}$ найкращим чином (оптимальним, кожна в своєму розумінні) апроксимувати ідеальне спектральний вікно вузько-смугового фільтра.

Отже, застосування запропонованих оптимальних фільтрів при спектральному аналізі випадкових сигналів діагностування технічного стану двигунів засобів водного транспорту дозволяє своєчасно виявити можливі несправності чи порушення у режимах роботи (відповідно до заздалегідь відомих, справних). Своєчасне виявлення можливих відмов двигунів засобів водного транспорту дозволить уникнути додаткових витрат під час перевезення вантажів, тобто зменшити додаткові (непланові) витрати.

Список літератури

1. Морская радиоэлектроника / Соловьев И.В. и др.; под ред. Кравченко В.А. СПб.: Политехника, 2003. 185 с.
2. Войтенко С.С., Герасимов С.В., Куценко В.В. Напрями удосконалення системи контролю технічного стану зразків озброєння та військової техніки. *Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України*. Х.: ХНУПС. 2016. Вип. 3 (24) С. 127–131.
3. Каретников В.В., Пащенко И.В., Соколов А.И., Кузнецов И.Г. К вопросу построения автоматизированной системы мониторинга параметров высокоточного навигационного поля. *Морская радиоэлектроника*. 2015. № 2 (52). С. 24–27.
4. Coelli T., Prasada Rao D.S., Battese G.E. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. p. 275.
5. Decarbonising the maritime supply chain. *MER*. 2010. № 11. P. 8.

6. Diesel Directory. Marine Propulsion Perspective in association with MER. 2013. № 1. P. 10–23.
7. Ramakrishnan C.R., Sekar R. Model-Dased Analysis of Configuration Vulnerabilities. URL: http://seclab.cs.sunisb.edu/sec_lab1/pubs/papers/widsoo.pdf (дата звернення: 02.10.2021)
8. Sheyner O., Wing J., Lippman R., Haines J. Automated Generation and Analysis of Attak Graphs. In *2002 IEEE Symposium on Security and Privacy*. Oaklend, California, 2002. URL: <http://csse.usc.edu>. (дата звернення: 07.09.2021)
9. Дослідження фільтрів для спектрального аналізу випадкових сигналів двигунів засобів водного транспорту / Штрибець В.В. та ін. *Новітні технології*. 2019. Вип.2(9). С.25–31.
10. Штрибець В.В., Трофіменко А.О., Шевченко А.П. Розроблення фільтрових методів спектрального аналізу випадкових сигналів для контролю технічного стану двигунів засобів водного транспорту. *Slovak international scientific journal*. Vol.1. No.34, 2019. P.30–38.
11. Thomson W.T.: «A Review of On-Line Condition Monitoring Techniques for Three-Phase Squirrel-Cage Induction Motors – Past, Present and Future». *Keynote address at IEEE Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives*, Gijon, Spain, Sept. 1999, p.p. 3–18.
12. Основи технічної експлуатації автоматизованої системи управління судном: підручник / Богом'я В.І. та ін.; за заг. ред О.М. Тимощук. Київ, 2018. 305 с.
13. Особливості системного підходу до вирішення наукових завдань експлуатації суднового обладнання: підручник / Богом'я В.І. та ін. за заг. ред. Тимощук О. М.. Київ, 2018. 305 с.