

Федунов В.М. Державний університет інфраструктури та технологій, старший викладач кафедри судноводіння та експлуатації технічних систем на водному транспорті, м.Ізмаїл

АНАЛІЗ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОЦІНОК СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ПОТУЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Постановка проблеми. Характеристики апаратури спектрального аналізу в значній мірі визначаються використовуваними в ній методами вимірювання оцінок СЦП. У зв'язку з цим виникає необхідність подальшого розвитку методів порівняльного аналізу оцінок СЦП випадкових сигналів, що вимірюються різними методами, метою якого є визначення оптимального методу, який дозволяє за один і той же час аналізу (вимірювання) отримати інтегральну оцінку СЦП з найменшою дисперсією похибки вимірювання.

Мета статті – удосконалення узагальненої математичної моделі порівняння основних класичних методів апаратного спектрального аналізу. За допомогою запропонованої моделі отримані аналітичні вирази для визначення статистичних характеристик (математичного очікування та дисперсії) фільтрів спектрального аналізу випадкових сигналів для контролю технічного стану двигунів засобів водного транспорту. Результати є базою для розв'язання задач оптимізації форми спектрального вікна фільтрів апаратури для спектрального аналізу випадкових сигналів.

Для контролю технічного стану двигунів засобів водного транспорту методом спектрального аналізу випадкового сигналу, який характеризує дефекти (несправності), необхідно застосовувати вузько-смугові фільтри для підвищення точності оцінки частот дефекту (несправності). Підвищення такої точності дозволить виключити вплив сусідніх частот (характеристик спектру) (рис. 1).

Виклад основного метеріалу дослідження.

1. Аналіз математичного очікування оцінок спектральної щільності потужності апаратурних методів

Із використанням запропонованої узагальненої математичної моделі оцінок СЩП отримаємо аналітичні співвідношення для математичного очікування та дисперсії оцінок СЩП різних методів, які будуть використані для порівняльного аналізу методів і розв'язання задач оптимізації АЧХ вузько-смугового фільтра для спектрального аналізу.

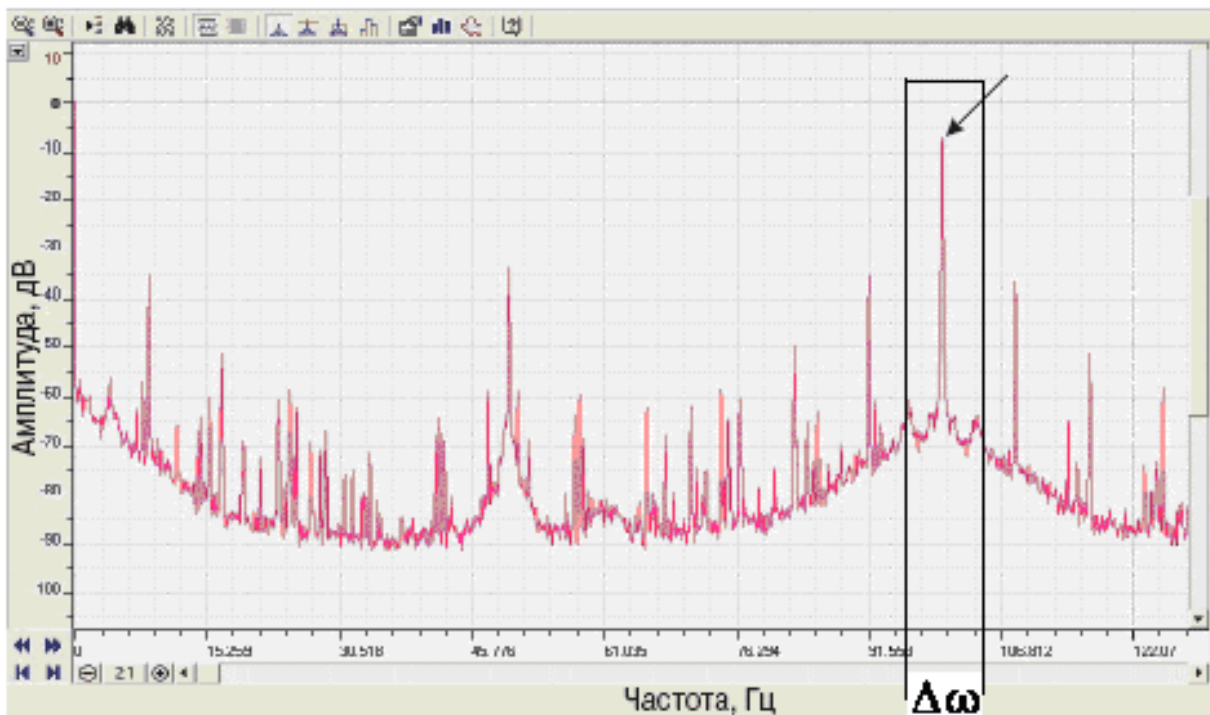


Рисунок 1 – Частотна характеристика модулю вектору струму електродвигуна при короткому замкненні обмотки статора для вузько-смугового фільтра частоти $\Delta\omega$

Для математичного очікування оцінок СЩП маємо

$$\langle \hat{G} \rangle \equiv M[\hat{G}] = M \left[\int_0^T H(\tau) \hat{R}(\tau) d\tau \right],$$

або, застосовуючи властивості математичного очікування,

$$M[\hat{G}] = \int_0^T H(\tau) M[\hat{R}(\tau)] d\tau.$$

Оскільки $M[\hat{R}(\tau)] = R(\tau)$, то

$$M[\hat{G}] = \int_0^T H(\tau) R(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Звідси виходить, що при однаковій функції $H(\tau)$ математичне очікування всіх оцінок СЩП однаково. Використовуючи співвідношення Вінера-Хінчіна [2]

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (2)$$

з виразу (1), підставляючи рівність (2), отримаємо

$$M[\hat{G}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T H(\tau) G(\omega) \cos \omega\tau d\tau d\omega.$$

Представимо цей вираз у вигляді

$$M[\hat{G}] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) G(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \Phi(\omega) G(\omega) d\omega, \quad (3)$$

$$\text{де } \Phi(\omega) = \int_0^T H(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad 0 < \tau < T, \quad - \quad (4)$$

ФСВ (або фільтруюча функція).

Локальну оцінку СЦП $\hat{G}(\omega_0)$ отримаємо, якщо функція $\Phi(\omega)$ має нескінченно вузький пік при $\omega = \omega_0$, тобто $\Phi(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_0)$, де $\delta(\omega - \omega_0)$ – дельта функція. Тоді $M[\hat{G}] \sim G(\omega_0)$. Однак, як відомо, і це буде видно далі при аналізі дисперсії оцінок СЦП, дисперсія локальної оцінки не прагне до нуля при $T \rightarrow \infty$. Іншими словами, локальна оцінка СЦП $\hat{G}(\omega_0)$ недостатня. Даний важливий висновок не залежить від методу оцінки СЦП, тобто він притаманний усім без винятку методам. Достатні оцінки СЦП можуть бути отримані тільки з використанням функцій $\Phi(\omega)$, ширина яких $\Delta\omega \neq 0$.

Це означає, що достатні оцінки СЦП можна отримувати тільки для інтегральних оцінок СЦП $\hat{G}(\omega_0)$, при яких відбувається усереднення функції $G(\omega)$ в межах інтервалу частот $\Delta\omega$ поблизу центральної частоти ω_0 . Характер такого усереднення визначається формою ФСВ $\Phi(\omega)$ при заданій її ширині тим чи іншим способом. У зазначеному вище сенсі ідеальною є прямокутна форма функції $\Phi_0(\omega)$. Вона забезпечує усунення двох істотних методичних похибок вимірювання оцінок СЦП методами, що включають вузько-смугову фільтрацію:

- похибки, зумовленої «розмиванням» спектра («leacage») або, по-іншому, перетіканням потужності з областей поза $\Delta\omega$ у діапазон вимірювання $\Delta\omega$. Відсутність цієї похибки забезпечується рівністю нулю ФСВ $\Phi(\omega)$ поза діапазону $\Delta\omega$;

- похибки, що викликаються паразитною амплітудною модуляцією спектра. Ця похибка виникає, якщо реальна ФСВ $\Phi(\omega)$ непостійна в інтервалі $\Delta\omega$. З точки зору зменшення даної похибки (при тій же дисперсії оцінки) кращим буде такий фільтр, форма якого близька до ідеального (прямокутного). Але ідеальний фільтр має АЧХ (ФСВ, що фільтрує функцію) з нескінченно

крутими фронтам і зрізом, а такий фільтр можна отримати тільки теоретично при $T = \infty$.

У зв'язку з цим абсолютно природна постановка задачі оптимізації форми ФСВ $\Phi(\omega)$ і відповідно до функції $H(\tau)$, тобто визначення такої функції $H(\tau)$, яка за цей час T і при заданій дисперсії оцінки СЦП забезпечувала б найкраще наближення до ідеального фільтру. Ці завдання будуть сформульовані та розв'язані у наступному розділі 3. Наближення ФСВ фільтру для спектрального аналізу випадкового сигналу, який характеризує дефект (несправність) двигунів засобів водного транспорту, характеризує достовірність контролю технічного стану двигунів.

2. Аналіз дисперсії оцінок спектральної щільності потужності апаратних методів спектрального аналізу

Для обчислення дисперсії оцінок СЦП скористаємося співвідношенням [89]

$$D[\hat{G}] = M[\hat{G}^2] - (M[\hat{G}])^2. \quad (5)$$

Підставляючи в рівність (5) вираз (1), отримаємо

$$D[\hat{G}] = M \left[\left(\int_0^T H(\tau) \hat{R}(\tau) d\tau \right)^2 \right] - \left\{ M \left[\int_0^T H(\tau) \hat{R}(\tau) d\tau \right] \right\}^2.$$

Запишемо цей вираз так:

$$D[\hat{G}] = \int_0^T \int_0^T H(\tau) H(\tau') M[\hat{R}(\tau) \hat{R}(\tau')] d\tau d\tau' - \left(\int_0^T H(\tau) M[\hat{R}(\tau) d\tau] \right)^2.$$

Це співвідношення представимо у вигляді

$$D[\hat{G}] = \int_0^T \int_0^T H(\tau)H(\tau')Q(\tau, \tau')d\tau d\tau', \quad (6)$$

$$\text{де } Q(\tau, \tau') = M[\hat{R}(\tau)\hat{R}(\tau')] - M[\hat{R}(\tau)] \cdot M[\hat{R}(\tau')], \quad (7)$$

тобто функція $Q(\tau, \tau')$ є центрована кореляційна функція оцінки $\hat{R}(\tau)$.
Визначимо її для оптимальної оцінки при нормальному законі розподілу величин $\{x(t)\}$. З урахуванням виразу (5) маємо

$$M[\hat{R}(\tau)\hat{R}(\tau')] = M\left[\frac{1}{T-\tau} \int_0^T x(t)x(t-\tau)d\tau \cdot \frac{1}{T-\tau'} \int_0^T x(t')x(t'-\tau')d\tau'\right],$$

звідки

$$M[\hat{R}(\tau)\hat{R}(\tau')] = \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{\tau}^T dt \int_{\tau'}^T dt' M[x(t)x(t-\tau)x(t')x(t'-\tau')]. \quad (8)$$

Для нормального закону розподілу величин $\{x(t)\}$ справедливо співвідношення [3, 4]

$$M[x(t)x(t-\tau)x(t')x(t'-\tau')] = R(\tau)R(\tau') + R(t-t')R(t-t'-\tau+\tau') + R(t-t'+\tau')R(t-t'-\tau').$$

Підставляючи це рівність в (2.32), отримаємо

$$M[\hat{R}(\tau)\hat{R}(\tau')] = \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{\tau}^T dt \int_{\tau'}^T dt' [R(\tau)R(\tau') + R(t-t')R(t-t'-\tau+\tau') + R(t-t'+\tau')R(t-t'-\tau')]$$

або

$$M[\hat{R}(\tau)\hat{R}(\tau)] = M[\hat{R}(\tau)] \cdot M[\hat{R}(\tau')] + \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{\tau}^T dt \int_{\tau'}^T dt' R(t-t')R(t-t'-\tau+\tau') + \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{\tau}^T dt \int_{\tau'}^T dt' R(t-t'+\tau')R(t-t'-\tau).$$

Підстановка цієї рівності в формулу (7) дає оптимальну функцію $Q_{\text{опт}}(\tau, \tau')$, оскільки функція $Q(\tau, \tau')$ визначається для оптимальної оцінки кореляційної функції $R_{\text{опт}}(\tau)$. Отже, маємо

$$Q_{\text{опт}}(\tau, \tau') = Q_1(\tau, \tau') + Q_2(\tau, \tau'), \quad (9)$$

$$\text{де } Q_1(\tau, \tau') = \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{\tau}^T dt \int_{\tau'}^T dt' R(t-t')R(t-t'-\tau+\tau'); \quad (10)$$

$$Q_2(\tau, \tau') = \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{\tau}^T dt \int_{\tau'}^T dt' R(t-t'+\tau')R(t-t'-\tau). \quad (11)$$

Як видно з (10), (11) і (9), функції $Q_1(\tau, \tau')$, $Q_2(\tau, \tau')$, а відповідно, і функція $Q_{\text{опт}}(\tau, \tau')$, симетричні щодо перестановки аргументів τ і τ' , тобто $Q(\tau, \tau') = Q(\tau', \tau)$. Тому достатньо вирахувати їх при $\tau > \tau'$.

Запишемо вираз для $Q_1(\tau, \tau')$, при $\tau > \tau'$. Після заміни у формулі (10) змінних $u = t - \tau'$ (рис. 1), отримаємо

$$Q_1(\tau, \tau') = \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{\tau}^T dt \int_{t-T}^{t-\tau'} du R(u)R(u-\tau+\tau'). \quad (12)$$

У виразі (12) проведемо зміну порядку інтегрування з використанням рисунку (рис. 2), маємо

$$\int_{\tau}^T \int_{t-T}^{t-\tau'} du = \int_{-T+\tau}^0 \int_{\tau}^{T+u} dt + \int_0^{\tau-\tau'} \int_{\tau}^T du + \int_{\tau-\tau'}^{T-\tau'} \int_{u+\tau'}^T dt =$$

$$= \int_{-T+\tau}^0 (T+u+\tau) du + \int_0^{\tau-\tau'} (T-\tau) du + \int_{\tau-\tau'}^{T-\tau'} (T-u-\tau') du.$$

Цей вираз представимо у згорнутому вигляді

$$\int_{\tau}^T \int_{t-T}^{t-\tau'} du = \int_{-T+\tau}^{T-\tau'} \Psi(u) du, \quad (13)$$

$$\text{де } \Psi(u) = \begin{cases} T+u-\tau & \text{при } -T+\tau < u < 0; \\ T-\tau & \text{при } 0 < u < \tau-\tau'; \\ T-u-\tau' & \text{при } \tau-\tau' < u < T-\tau'. \end{cases} \quad (14)$$

Графік функції $\Psi(u)$ наведено на рисунку 3 [4, 5].

З урахуванням рівності (9) для формули (12) при $\tau > \tau'$ отримаємо

$$Q_1(\tau, \tau') = \frac{1}{(T-\tau)(T-\tau')} \int_{-T+\tau}^{T-\tau'} \Psi(u) R(u) R(u-\tau+\tau') du. \quad (15)$$

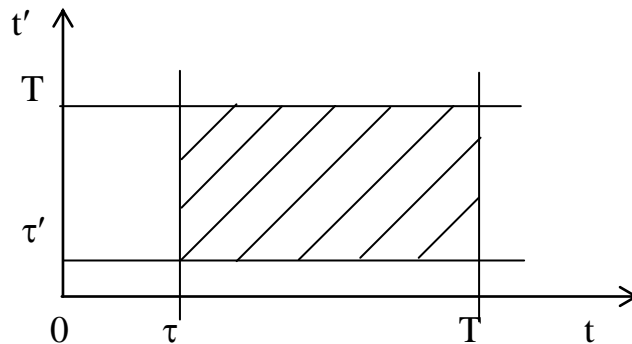


Рисунок 1 – До пояснення заміни змінних $u = t - t'$

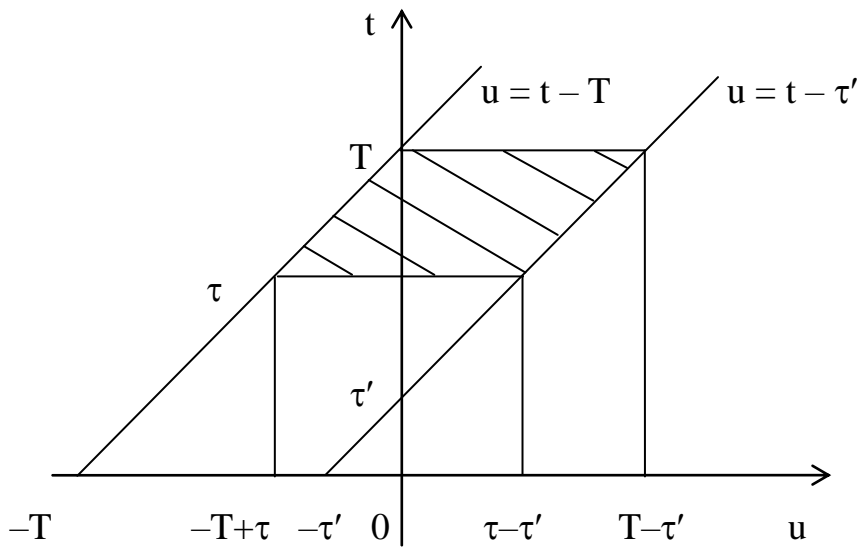


Рисунок 2 – До пояснення зміни порядку інтегрування

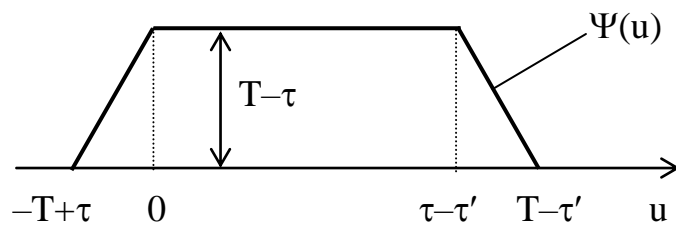


Рисунок 3 – Графік функції $\psi(u)$

Проаналізуємо формулу (15). Введемо величину τ_0 – інтервал кореляції величин $\{x(t)\}$, тобто функція $R(\tau)$ дуже мала при $\tau < \tau_0$. Тоді функція $Q_1(\tau, \tau')$ відмінна від нуля тільки при $|\tau - \tau'| \leq 2\tau_0$ [6–9]. Це означає, що інтервал кореляції функції $R(\tau)$ приблизно вдвічі більший за інтервал кореляції величин $\{x(t)\}$. Таким чином, якщо $T - \tau \gg \tau_0$ і $T - \tau' \gg \tau_0$, то для виразу (15) справедливий наближений запис:

$$Q_1(\tau, \tau') \approx \frac{1}{T - \tau - T + \tau} \int_{-T + \tau}^{T - \tau'} R(u) R(u - |\tau - \tau'|) du \approx \frac{1}{T - \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R(u) R(u - |\tau - \tau'|) du. \quad (16)$$

Аналогічно співвідношенню (14) для функції $Q_2(\tau, \tau')$ отримаємо

$$Q_2(\tau, \tau') = \frac{1}{(T - \tau)(T - \tau')} \int_{-T + \tau}^{T - \tau'} \Psi(u) R(u + \tau') R(u - \tau) du. \quad (17)$$

Аналіз функцій $Q_1(\tau, \tau')$ і $Q_2(\tau, \tau')$ відповідно до виразів (15) і (17), показує, що при всіх значеннях τ і τ' , за винятком малої області $\tau, \tau' < \tau_0$, справедлива умова $R(u)R(u - |\tau - \tau'|) \gg R(u + \tau')R(u - \tau)$, що аналогічно $Q_1(\tau, \tau') \gg Q_2(\tau, \tau')$ [9–10]. Тому для кореляційної функції оптимальної оцінки (9) можна прийняти $Q_{\text{опт}}(\tau, \tau') = Q_1(\tau, \tau')$, а з урахуванням співвідношення (16)

$$Q_{\text{опт}}(\tau, \tau') \approx \frac{1}{T - \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R(u) R(u - |\tau - \tau'|) du. \quad (18)$$

Узагальнюючи цей висновок, можна зробити більш загальне твердження: якщо оцінка кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$ отримана усередненням величин $x(t)x(t + \tau)$ на часовому інтервалі $T_{\text{уср}}$, то функція $Q(\tau, \tau')$ для такої оцінки [10]

$$Q(\tau, \tau') \approx \frac{1}{T_{\text{уср}}} \int_{-\infty}^{\infty} R(u) R(u - |\tau - \tau'|) du. \quad (19)$$

Так, для оцінки $\hat{R}_1(\tau)$, методу вимірювання оцінки СЦП \hat{G}_1 , заснованого на часовому усередненні квадрата фільтрованої реалізації випадкового сигналу $x(t)$ [5, 11], отримаємо

$$Q_1(\tau, \tau') \approx \begin{cases} \frac{1}{T-t_0} \int_{-\infty}^{\infty} R(u)R(u-|\tau-\tau'|)du, & \tau < t_0; \\ \frac{1}{T-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} R(u)R(u-|\tau-\tau'|)du, & \tau > t_0, \end{cases} \quad (20)$$

де $\tau = t_0$ – значення, при якому характеристика $h(\tau)$ вузько-смугового фільтра має максимум.

Для оцінки $\hat{R}_4(\tau)$, заснованої на тимчасовому усередненні квадратів коефіцієнтів Фур'є реалізації випадкового сигналу, маємо [13]

$$T_{\text{уср}} = n(T_1 - \tau) = T - \frac{T}{\tau_1} \tau.$$

Тоді

$$Q_4(\tau, \tau') \approx \frac{1}{T\left(1 - \frac{\tau}{T_1}\right)^{-\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} R(u)R(u-|\tau-\tau'|)du. \quad (21)$$

Порівняння виразів (20), (21) з формулою (19) показує, що функція $Q(\tau, \tau')$ для всіх оцінок $\hat{R}(\tau)$, а отже, і для всіх оцінок СЩП \hat{G} , описується формулою (2.60), але значення часу усереднення $T_{\text{уср}}$ для різних оцінок $\hat{R}(\tau)$ різне.

Наприклад:

- для оптимальної оцінки $T_{\text{уср}} = T - \tau$;
- для оцінки $\hat{R}_1(\tau)$: $T_{\text{уср}} = \begin{cases} T - t_0 & \text{при } \tau < t_0, \\ T - \tau & \text{при } \tau > t_0; \end{cases}$
- для оцінки $\hat{R}_4(\tau)$: $T_{\text{уср}} = T - \frac{T}{T_1} \tau = T\left(1 - \frac{\tau}{T_1}\right)$.

Представимо формулу (19) наступним чином [11]:

$$Q(\tau, \tau') = \frac{1}{T_{\text{уср}}(\tau)} F(|\tau - \tau'|), \quad (22)$$

$$\text{де } F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(u)R(u-x)du. \quad (23)$$

Функція $F(x)$ відмінна від нуля лише в області $|x| \leq 2\tau_0$.

Для розкриття фізичного змісту функції $F(x)$ скористаємося співвідношенням Вінера-Хінчіна (2). Тоді для формули (23) отримаємо

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G(\omega')e^{j\omega u} e^{-j\omega'(u-x)} d\omega d\omega'.$$

Перетворимо цей вираз

$$F(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G(\omega')e^{j\omega x} \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega) e^{j\omega x} d\omega.$$

$$\text{Звідки } F(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega) \cos \omega x d\omega. \quad (24)$$

Підставивши співвідношення (22) в формулу (6), знаходимо

$$D[\hat{G}] \approx \int_0^T \int \frac{H(\tau)}{\sqrt{T_{\text{уср}}(\tau)}} \frac{H(\tau')}{\sqrt{T_{\text{уср}}(\tau')}} F(|\tau - \tau'|) d\tau d\tau'.$$

З урахуванням виразу (24) маємо

$$D[\hat{G}] = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega) |\Psi(\omega)|^2 d\omega, \quad (25)$$

$$\text{де } \Psi(\omega) = \int_0^T \frac{H(\tau)}{\sqrt{T_{\text{уср}}(\tau)}} e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (26)$$

Якщо функція спектрального вікна $\Phi(\omega)$, обумовлена рівністю (4), відмінна від нуля лише в частотній області $\Delta\omega$ поблизу центральної частоти ω_0 , то і функція $\Psi(\omega)$ володіє цією ж властивістю, але форми графіків функцій $\Phi(\omega)$ и $\Psi(\omega)$, зрозуміло, різні. Якщо в межах смуги $\Delta\omega$ функцію $G(\omega)$ можна наближено вважати постійною, з формули (15) маємо

$$D[\hat{G}] \approx 2\pi G^2(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 d\omega = 4\pi^2 G^2(\omega_0) \int_0^T \frac{H^2(\tau)}{T_{\text{уср}}(\tau)} d\tau. \quad (27)$$

Отримаємо вираз для відносної дисперсії оцінок СЦП.

Для математичного очікування $M[\hat{G}]$ з тим же ступенем точності, що й для дисперсії $D[\hat{G}]$ відповідно до виразу (27), з використанням формул (3) і (4) знаходимо

$$M[\hat{G}] = G(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = G(\omega_0) 2\pi \int_0^T H(\tau) \delta(\tau) d\tau \approx \pi G(\omega_0) H(0). \quad (28)$$

Підставляючи співвідношення (27) і (28) в рівність для відносної дисперсії, маємо

$$\delta\hat{G} \approx \frac{4}{H^2(0)} \int_0^T \frac{H^2(\tau)}{T_{\text{уср}}(\tau)} d\tau. \quad (29)$$

Ця формула отримана при припущенні, що функція $H(\tau)$ мало змінюється в інтервалі порядку τ_0 .

Оцінимо порядок величини $\delta\hat{G}$. Для цього позначимо через τ_ϕ ширину перетворюючої функції $H(\tau)$, тоді із виразу (29) слідує

$$\delta\hat{G} \approx \frac{\tau_\phi}{T},$$

що можна записати у загальному вигляді

$$\delta\hat{G} = k \frac{\tau_\phi}{T}, \quad (30)$$

де k – чисельний коефіцієнт, який залежить, по-перше, від обраної оцінки кореляційної функції $R(\tau)$ (через $T_{\text{уср}}(\tau)$) і, по-друге, від форми перетворюючої функції $H(\tau)$.

Для ілюстрації наведеного методу визначення відносної дисперсії оцінок СЦП розглянуті три приклади – для найбільш перспективних оцінок СЦП.

Отже, при обраній оцінці кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$, що відповідає обраному методу вимірювання оцінки СЦП \hat{G} , відносна дисперсія оцінки СЦП $\delta\hat{G}$ визначається формулою (30), причому чисельний коефіцієнт k залежить від обраної форми перетворюючої функції або функції спектрального вікна фільтра. Відзначимо ще одну практично корисну формулу для дисперсії, придатну за умови, коли $\tau_\phi \ll T$, при $\tau \ll T$ і $T_{\text{уср}} = \text{const}$. Це, зокрема, має місце

для розглянутих вище апаратурних методів вимірювання оцінки СЦП \hat{G}_1 і \hat{G}_5 .
У цьому випадку з формули (29) маємо

$$\delta\hat{G} = \frac{4}{H^2(0)T_{\text{уср}}} \int_0^T H^2(\tau) d\tau.$$

Для методу вимірювання оцінки СЦП \hat{G}_1 слід прийняти $T_{\text{уср}} \approx T - \tau_0$, для методу вимірювання оцінки СЦП

$$\hat{G}_5 - T_{\text{уср}} \approx T.$$

Отримаємо:

$$\delta\hat{G} = \frac{2\pi \int_0^{\infty} \Phi^2(\omega) d\omega}{T_{\text{уср}} \left(\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega \right)^2}. \quad (31)$$

Визначити ефективну смугу фільтрації в загальноприйнятому сенсі [5, 12–14]

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{\left(\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega \right)^2}{\int_0^{\infty} \Phi^2(\omega) d\omega}.$$

З урахуванням цієї рівності формула (31) прийме відомий вигляд [6]

$$\delta \hat{G} = \frac{2\pi}{T_{\text{уср}} \Delta \omega_{\text{эфф}}} = \frac{1}{T_{\text{уср}} \Delta f_{\text{эфф}}}. \quad (32)$$

Формула (32) пов'язує відносну дисперсію оцінок СЩП усереднення та ефективної смугою фільтрації.

Висновки. Таким чином, отримані вирази для статистичних характеристик оцінок СЩП з використанням узагальненої математичної моделі дозволяють проводити порівняльний аналіз оцінок СЩП з єдиних позицій.

Отримані результати є основою для оптимізації форми спектрального вікна вузько-смугових фільтрів, які пропонується використовувати при спектральному аналізі випадкових сигналів для контролю технічного стану двигунів засобів водного транспорту.

Запропонована та обґрунтована узагальнена математична модель оптимальних оцінок СЩП, що дозволяє порівняти різні методи апаратного спектрального аналізу випадкових сигналів і виявити серед них оптимальні, виходячи із статистичної теорії прийняття рішень, тобто по максимуму функції правдоподібності.

Досліджено метод перемноження вимірювання оцінки СЩП випадкових сигналів, заснований на часовому усередненні вихідного випадкового сигналу та його фільтрованої реалізації (на виході вузько-смугового фільтра), який забезпечує більш високу точність спектрального аналізу при більш простій апаратній реалізації порівняно з методом безпосередньої фільтрації, який зводиться до часового усереднення квадрата фільтрованої реалізації випадкового сигналу.

Показано, що всі оцінки СЩП, отримані розглянутими методами апаратного спектрального аналізу, зводяться до узагальненої математичної моделі. Різниця між ними полягає лише в різному виборі оцінок кореляційної функції та в різному вигляді перетворюючої функції. Запропонований метод

множення вимірювання оцінки СЩП випадкових сигналів належить до оптимальних методів, але він простіше інших методів спектрального аналізу.

Список літератури

1. Казаков И.Е. Аналитическое конструирование условно-оптимального управления в нелинейно-стохастической системе по сложному локальному критерию. А и Т, 1995. № 3. С. 34–46.

2. Конкс Г.А., Лашко В.А. Некоторые итоги развития мирового судового дизелестроения за последние годы. *Актуальные проблемы создания, проектирования и эксплуатации современных двигателей внутреннего сгорания: сб. науч. тр.* Хабаровск: Хабар. гос. техн. ун-т. 2001. Вып. 2. С. 4–29.

3. Красавский А.А. Теория самоорганизующегося оптимального регулятора биномиального типа в детерминировано-стохастическом приближении. А и Т, 1999. № 5. С. 97–113.

4. Лукомский Ю.А., Пешехонов В.Г., Скороходов Д.А. Навигация и управление движением судов. СПб.: Элмор, 2002. 360 с.

5. Мирошник И.В., Никифоров А.Л., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. С-Пб.: Наука, 2000. 549 с.

6. Новицкий П.В., Зограф И.В. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 245 с.

7. Малиновский М.А., Фока А.А., Ролинский В.И. Обеспечение надежности судовых дизелей на эксплуатационных и особых режимах работы. Одесса: Феникс, 2007. 152 с.

8. Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. М.: Наука, 2006. 40 с.

9. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. Киев: Наукова думка, 1990. 184 с.

10. Пухов Г.Е. Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. К.: Наукова думка, 1988. 216 с.

11. Чинков В.Н., Тищенко В.А. Основные направления совершенствования фильтровых методов спектрального анализа. *Системи обробки інформації*. 1999. Вип. 2 (6). С. 44–47.

12. Чинков В.Н., Тищенко В.А. Основы теории оптимизации полосовых фильтров для спектрального анализа случайных сигналов. *Вестник ХГПУ*. 1998. Вып. 21. С. 129–133.

13. Шильман С.В. Адаптивные фильтры Кальмана. *Докл. РАН*. 1994. Т. 338. № 6. С. 724–744.

14. Штрибець В.В. Контроль технічного стану двигунів засобів водного транспорту методом спектрального аналізу випадкових сигналів. *Новітні технології*. 2019. Вип.1(8). С. 59–69.