УДК 681.513 https://doi.org/10.33298/mataparat.05

Чебан В.І. Державний університет інфраструктури та технологій, старший викладач кафедри судноводіння та експлуатації технічних систем на водному транспорті, м.Ізмаїл

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОРІВНЯННЯ ОСНОВНИХ КЛАСИЧНИХ МЕТОДІВ АПАРАТУРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Постановка проблеми. Розглянемо метод перемноження. Цей метод заснований на часовому усередненні випадкового сигналу x(t) і його фільтрованої реалізації y(t). Зведемо оцінки СЩП, отримані перерахованими методами, до узагальненого виду [1, 2].

Мета дослідження – удосконалення узагальненої математичної моделі порівняння основних класичних методів апаратурного спектрального аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Оцінка спектральної щільності потужності вимірювання часового усереднення квадрата фільтрованої реалізації випадкового сигналу

Суть даного методу вимірювання («фільтровий» або метод безпосередньої фільтрації), описується виразами

$$\hat{G}_1 = \int_0^T dt \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' h(t-\tau) h(t-\tau') x(\tau) x(\tau'),$$

або

$$\hat{G}_1 = \int_0^T dt \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' h(\tau) h(\tau') x(t-\tau) x(t-\tau'). \qquad (1)$$

Перетворимо дане співвідношення. Для цього змінимо порядок інтегрування у формулі (1), використовуючи рис.2 так:

$$\int_0^T dt\int_0^t d\tau\int_0^t d\tau' = \int_0^T d\tau\left(\int_0^\tau d\tau'\int_\tau^T dt + \int_\tau^T d\tau'\int_{\tau'}^T dt\right) = \int_0^T d\tau\int_0^T d\tau'\int_{\max(\tau,\tau')}^T dt\ .$$

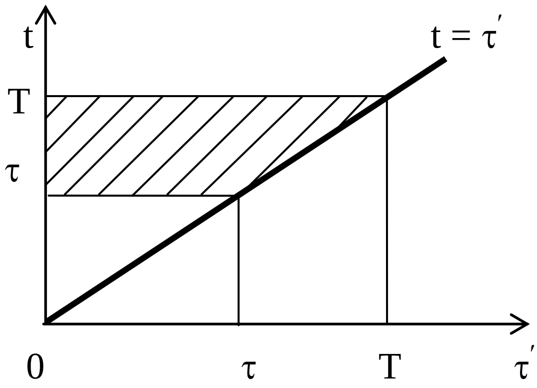

Рисунок 1 – До пояснення зміни порядку інтегрування у формулі (1)

З урахуванням цієї рівності для виразу (1) маємо

$$\hat{G}_1 = 2\int\int_{\tau>\tau'}^{T} d\tau\, d\tau'\, h(\tau)\, h(\tau')\int_{\tau}^{T} dt\, x(t-\tau)\, x(t-\tau'). \qquad (2)$$

Розглянемо інтеграл $\int_\tau^T x(t-\tau)x(t-\tau')dt$ при $\tau > \tau'$.

Вводячи заміну змінних $t - \tau = u$, отримаємо

$$\int_\tau^T x(t-\tau)x(t-\tau')\,dt = \int_0^{T-\tau} x(u)x(u+\tau-\tau')\,du.$$

Цей вираз є однією з можливих, але не оптимальних, оцінок кореляційної функції $\hat{R}_1(\tau-\tau')$:

$$\hat{R}_1(\tau-\tau')=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}x(u)\,x(u+\tau-\tau')\,du,\qquad \tau>\tau'. \tag{3}$$

Оптимальна оцінка кореляційної функції має вигляд

$$\hat{R}_{\text{опт}}(\tau-\tau')=\frac{1}{T-\tau+\tau'}\int_0^{T-\tau+\tau'}x(u)\,x(u+\tau-\tau')\,du,\quad \tau>\tau'. \tag{4}$$

Математичне очікування оцінки (3) дорівнює оптимальній оцінці (4), але її дисперсія трохи більше за рахунок меншого (на величину τ') інтервалу інтегрування. Підставляючи рівність (3) у формулу (2), маємо

$$\hat{G}_1=2\int_0^T d\tau\int_0^\tau d\tau' h(\tau)h(\tau')(T-\tau)\hat{R}_1(\tau-\tau').$$

Перетворюючи цей вираз, знаходимо

$$\hat{G}_1=2\int_0^T d\tau\int_0^\tau du\,h(\tau)h(\tau-u)(T-\tau)\hat{R}_1(u)=2\int_0^T du\int_u^T d\tau\,h(\tau)h(\tau-u)(T-\tau)\hat{R}_1(u)$$

або

$$\hat{G}_1=\int_0^T H_1(u)\hat{R}_1(u)\,du, \tag{5}$$

де $H_1(u)=2\int_u^T h(\tau)h(\tau-u)(T-u)\,d\tau.$ (6)

Аналіз цього виразу показує, що можливості варіювання форми перетворюючої функції обмежені, оскільки, інтегральне рівняння (6) не для будь-якої функції $H_1(\tau)$ має рішення $h(\tau)$.

Отриманий результат можна уточнити так. Насправді оцінка (3) залежить і від $\tau - \tau' = u$, і від τ, тобто,

$$\hat{R}_1(u,\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)\,x(t+u)\,dt. \tag{7}$$

Тоді, використовуючи рівності (6) і (7), оцінку кореляційної функції можна представити так:

$$\hat{R}_1(u) = \frac{1}{H_1(u)}\int_u^T h(\tau)\,h(\tau-u)(T-\tau)\hat{R}_1(u,\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Якщо функція $\hat{R}_1(u,\tau)$ слабо залежить від τ, то $\hat{R}_1(u,\tau) \approx \hat{R}_1(u)$.

Це має місце в тому випадку, якщо в підінтегральному виразі (8) істотна лише область інтегрування $\tau \sim u << T$, тобто коли функція $h(\tau)$ істотно відмінна від нуля лише при малих значеннях τ. Якщо ж функція $h(\tau)$ має вузький максимум при $\tau = t_0$, то

$$\hat{R}_1(u) \approx \hat{R}_1(u,t_0) = \frac{1}{T-t_0}\int_0^{T-t_0} x(t)x(t+u)\,dt, \qquad u > t_0. \tag{9}$$

Якщо $u < t_0$, то

$$\hat{R}_1(u,\tau) \approx \hat{R}_1(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)\,dt. \tag{10}$$

Очевидно, в цьому випадку оцінка $\hat{R}_1(u)$ може істотно відрізняться від оптимальної оцінки $\hat{R}_{опт}(u)$ [3,4].

1. Оцінка спектральної щільності потужності непрямого методу вимірювання на усіченому перетворенні Фур'є

Даний непрямий метод вимірювання оцінки СЩП описується виразом (1), при цьому

$$H(\tau) = k(\tau)\cos\omega\tau. \tag{11}$$

Якщо за $\hat{R}_2(\tau)$ взята оптимальна оцінка, то і оцінка СЩП $\hat{G}_2$ буде оптимальною. Однак зазвичай за $\hat{R}_2$ беруть спрощену оцінку кореляційної функції

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt. \tag{12}$$

Якщо функція, що усікається $k(\tau)$ відмінна від нуля тільки при малих значеннях τ, то відмінність між оцінками $\hat{R}_2$ і $\hat{R}$ несуттєва.

Висновки. Отже, характеристики оцінки СЩП $\hat{G}_2$, отримані при вимірюванні наближеної оцінки кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$ згідно з рівністю (12), будуть близькі до оптимальних. В цьому випадку, також як і при використанні оптимальної оцінки $\hat{R}_2(\tau)$, вибором функції, що усікається $k(\tau)$ можна змінювати в потрібному напрямку форму перетворюючої функції $H_2(\tau)$, яка визначається формулою (11).

Список літератури

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2006. 751 с.

2. Теоретические основы испытаний и экспериментальная отработка сложных технических систем / Л.Н. Александровская и др. М.: Логос, 2003. 736 с.

3. Чинков В.Н., Тищенко Основные направления совершенствования фильтровых методов спектрального анализа. *Системи обробки інформації*. 1999. Вип. 2 (6). С. 44–47.

4. Чинков В.Н., Тищенко В.А. Основы теории оптимизации полосовых фильтров для спектрального анализа случайных сигналов. *Вестник ХГПУ.* 1998. Вып. 21. С. 129–133.

5. Штрибець В.В. Контроль технічного стану двигунів засобів водного транспорту методом спектрального аналізу випадкових сигналів. *Новітні технології.* 2019. Вип.1(8). С. 59–69.