УДК 519.873 https://doi.org/10.33298/mataparat.04

Іваненко В.М. Державний університет інфраструктури та технологій, старший викладач кафедри судноводіння та експлуатації технічних систем на водному транспорті, м.Ізмаїл

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ПОТУЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Постановка проблеми. Локальна оцінка СЩП не може бути отримана існуючими методами. З іншого боку, інтегральна (усереднена тим чи іншим способом) оцінка СЩП є спроможною [1]. У цьому випадку необхідно визначити, який з використовуваних методів дозволяє отримати інтегральну оцінку СЩП з найменшою дисперсією похибки (за фіксований час аналізу або вимірювання T).

Мета дослідження – визначення математичної моделі оцінки спектральної щільності потужності випадкових сигналів.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Характеристики апаратури спектрального аналізу в значній мірі визначаються використовуваними в ній методами вимірювання оцінок спектральної щільності потужності (СЩП). У зв'язку з цим виникає необхідність подальшого розвитку методів порівняльного аналізу оцінок СЩП випадкових сигналів, що вимірюються різними методами, метою якого є визначення оптимального методу, який дозволяє за один і той же час аналізу (вимірювання) отримати інтегральну оцінку СЩП з найменшою дисперсією похибки вимірювання.

Математична модель оцінки спектральної щільності потужності випадкових сигналів. Отримаємо спочатку загальний вигляд для будь-якої оцінки СЩП. Очевидно, маючи в своєму розпорядженні реалізацію випадкового процесу довжиною Т, можна визначити оцінку кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$ (тим чи іншим відомим способом) тільки для часу $-\tau < T < \tau$. Так як $\hat{R}(\tau)$ парна функція τ, то досить розглянути лише інтервал $\tau > 0$.

Будь-яка оцінка СЩП $\hat{G}$ (локальна або інтегральна) випадкового сигналу представляє в загальному випадку лінійне перетворення від оцінки кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$ цього сигналу. Тому загальний вигляд оцінки СЩП запишемо так [2]:

$$\hat{G}(\omega_0, \Delta\omega) = \hat{G} = \int_0^T H(\tau)\hat{R}(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

де $H(\tau)$ – функція перетворення;

ω_0 – частота аналізу;

$\Delta\omega$ – смуга усереднення.

Функція перетворення $H(\tau)$ залежить від частоти аналізу ω_0 при локальній оцінці СЩП і від величин ω_0, $\Delta\omega$ при інтегральній оцінці СЩП, а її вид (форма) визначають математичне очікування та дисперсію оцінки СЩП $\hat{G}$. Разом з тим при фіксованій функції $H(\tau)$ дисперсія оцінки СЩП $\hat{G}$ буде залежати від обраної оцінки кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$.

Позначимо сигнал, який характеризує дефект (несправність) двигунів засобів водного транспорту, за випадковий процес $x(t)$.

Для знаходження узагальненої математичної моделі оптимальної оцінки СЩП випадкового процесу $x(t)$ скористаємося статистичною теорією прийняття рішень [3]. Позначимо спільну багатовимірну функцію розподілу величин $x(t)$ і $\hat{R}(\tau)$ через $w[\{x(t)\};\{\hat{R}(\tau)\}]$.

З точки зору статистичної теорії прийняття рішень функція $\hat{R}(\tau)$ не відома та є випадковою величиною, апріорна дисперсія якої значна [3, 4]. Причому апріорна функція розподілу $w[\{\hat{R}(\tau)\}]$ має значну дисперсію. У результаті вимірювання величин $\{x(t)\}$ функція розподілу величин $\hat{R}(\tau)$ перетворюється в умовну функцію розподілу:

$$w[\{\hat{R}(\tau)\}/\{x(t)\}] = \frac{w[\{x(t)/\{\hat{R}(\tau)\}]w[\{\hat{R}(\tau)\}]}{w[\{x(t)\}]}. \quad (2)$$

Ширина умовної (апостеріорної) функції розподілу вужче, ніж апріорної, і чим вона вужче, тим точніше можна на підставі досвіду, тобто вимірювання послідовності $\{x\ (t)\}$, визначити оцінку кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$.

Різні апостеріорні оцінки $\hat{R}(\tau)$, а значить, і оцінки СЩП $\hat{G}$ мають, при даній послідовності $\{x(t)\}$, різні ймовірність і дисперсію. Згідно зі статистичною теорією прийняття рішень оптимальною є та оцінка СЩП $\hat{G}$ (і кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$), яка має найбільшу ймовірність або найменшу дисперсію [3,4].

Якщо умовна функція розподілу $w[\{R(\tau)\}/\{x(t)\}]$ досить вузька (це необхідно для того, щоб вимірювання було досить точним), то оцінки по максимуму ймовірності (оцінка Байєса) та по мінімуму дисперсії співпадають. Таким чином, дотримуючись статистичної теорії прийняття рішень, оптимальною буде та оцінка кореляційної функції $\hat{R}(\tau)$ (згідно з виразом (1) й оцінка СЩП $\hat{G}$), яка забезпечує максимум функції правдоподібності $w[\{x(t)\}/\{R(\tau)\}]$.

Знайдемо цю оцінку при припущенні, що випадковий процес, який досліджується, відноситься до класу гаусових, що справедливо для більшості реальних випадкових процесів [3]. Позначимо для спрощення записів

$$x(t_i) \equiv x_i; \qquad \hat{R}(t_i - t_j) \equiv \hat{R}_{ij}.$$

Тоді функція правдоподібності

$$w[x_i / \hat{R}_{ij}] = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left| \mathrm{Det}\, \hat{R}_{ij}^{-1} \right|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \hat{R}_{ij}^{-1} x_i x_j \right), \tag{3}$$

де $\hat{R}_{ij}^{-1}$ – матриця, зворотна кореляційній матриці $\hat{R}_{ij}$;

N – обсяг вибірки, по якій визначається оцінка кореляційної функції;

$$\mathrm{Det}\; \hat{R}_{ij}^{-1} = \begin{vmatrix} \hat{R}^{-1}(0) & \hat{R}^{-1}(1) & \hat{R}^{-1}(2) & \dots \\ \hat{R}^{-1}(1) & \hat{R}^{-1}(0) & \hat{R}^{-1}(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{R}^{-1}(N-1) & \hat{R}^{-1}(N-2) & \dots & \hat{R}^{-1}(0) \end{vmatrix}.$$

У формулі (3) використовується зворотна матриця $\hat{R}_{ij}^{-1}$, а не матриця $\hat{R}_{ij}$, так як матриця $\hat{R}_{ij}^{-1}$ простіше для розрахунків. Оскільки матричні елементи кореляційної матриці $\hat{R}_{ij}$ і матриці $\hat{R}_{ij}^{-1}$, зворотної кореляційній, залежать від різниці індексів $\hat{R}_{ij} = \hat{R}_{ij}(|i-j|)$ і $\hat{R}_{ij}^{-1} = \hat{R}_{ij}^{-1}(|i-j|)$, то позначимо $\hat{R}_{i,i+k} \equiv \hat{R}(k)$ і $\hat{R}_{i,i+k}^{-1} \equiv \hat{R}^{-1}(k)$. Значення коефіцієнтів матриці $\hat{R}^{-1}(k)$, забезпечують максимум функції правдоподібності (2.3), можуть бути визначені з умови

$$\frac{\partial w\left[x_i / \hat{R}_{ij}\right]}{\partial \hat{R}^{-1}(k)} = 0 \;.$$

Запишемо суму у виразі (3) з урахуванням рис.1, так:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \hat{R}^{-1}(|i-j|)x_i x_j = 2\sum_{i>j}^{N} \hat{R}^{-1}(i-j)x_i x_j + \sum_{i=1}^{N} \hat{R}^{-1}(0)x_i^2 \;,$$

або

$$\sum_{i,j=1}^{N} \hat{R}^{-1}(|i-j|)x_i x_j = 2\sum_{k=1}^{N-1} \hat{R}_k^{-1} \sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k} + \sum_{i=1}^{N} \hat{R}^{-1}(0)x_i^2, \qquad i-j=k.$$

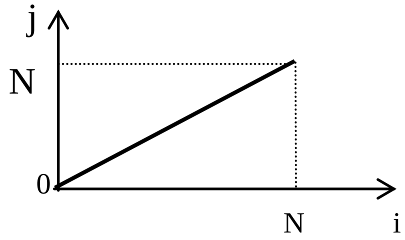

Рисунок 1 – До поясненням підсумовування

Обчислимо приватні похідні від детермінанта $\Delta = \mathrm{Det}\, R_{ij}^{-1}$, знаходимо

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \hat{R}_0^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hat{R}_1^{-1} & \hat{R}_0^{-1} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{R}_0^{-1} & \hat{R}_1^{-1} & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} & \dots \\ & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{vmatrix},$$

або

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\hat{R}_0^{-1}} = \Delta_{11} + \Delta_{22} + ... + \Delta_{NN},$$

де Δ_{ij} – алгебраїчне доповнення елементів $\hat{R}_{ij}^{-1}$.

Так як $\hat{R}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$ і $\hat{R}_{11} = \hat{R}_{22} = ... = \hat{R}_{NN} = \hat{R}(0)$, то $\frac{\partial\Delta}{\partial\hat{R}_0^{-1}} = \Delta(\hat{R}_{11} + \hat{R}_{22} + ... + \hat{R}_{NN}) = N\Delta\hat{R}(0)$.

При обчисленні інших часткових похідних потрібно врахувати, що елемент $\hat{R}_k^{-1}$ зустрічається в 2k рядках (k зверху і k знизу) по одному разу і в (N – 2k) рядках по два рази (при $k \le \frac{N}{2}$). Тоді

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\hat{R}_k^{-1}} = \Delta[2k + 2(N - 2k)]\hat{R}(k) = 2(N - k)\Delta\hat{R}_k.$$

При $k > \frac{N}{2}$ елемент $\hat{R}_k$ зустрічається тільки в 2 (N – k) рядках по одному разу, а, значить, для нього також годиться отримане співвідношення.

З урахуванням вищесказаного, спростимо вираз (2.3) по $\hat{R}_k^{-1}$ і запишемо умову

$$\frac{\partial w}{\partial\hat{R}_k^{-1}} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\hat{R}_{ij}^{-1}x_i x_j\right)\left[\Delta^{-\frac{1}{2}}(N-k)\hat{R}_k - \Delta^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{N-k}x_j x_{j+k}\right] = 0.$$

Звідси знаходимо оптимальну оцінку

$$\hat{R}(k)=\hat{R}_k=\frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k}x_j x_{j+k}, \qquad (4)$$

де $N=\frac{T}{\tau_Д}$; $k=\frac{\tau}{\tau_Д}$;

$\tau_Д$ – інтервал дискретизації випадкового процесу x (t).

Переходячи до межі у формулі (4) при $\tau_Д \to 0$, маємо

$$\hat{R}_{опт}(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}x(t)x(t+\tau)d\tau. \qquad (5)$$

Ця оцінка кореляційної функції оптимальна в тому сенсі, що вона забезпечує найменшу, порівняно з іншими оцінками, дисперсію, внаслідок максимально повного використання інформації про процеси, що міститься в послідовності $\{x(t)\}$. Її використання дозволяє отримати з виразу (1) оптимальну оцінку СЩП $\hat{G}_{опт}$, забезпечує, порівняно з іншими оцінками, найменшу дисперсію, тобто вона забезпечує найбільшу точність вимірювань. У практиці апаратурного спектрального аналізу часто використовують спрощену оцінку СЩП, в якій для всіх значень τ час інтегрування приймається постійним [4, 5]:

$$\hat{R}(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T}x(t)x(t+\tau)d\tau\,. \qquad (6)$$

З цього співвідношення видно, що для отримання оцінки $\hat{R}(\tau)$ необхідно знати значення сигналу x(t) при t > T.

Так, якщо цікавляться значеннями кореляційної функції при $0<\tau<\tau_1$, то потрібно знати x (t) при

$$0 < t < T+\tau_1.$$

Але якщо сигнал x(t) відомий на інтервалі $0 \le t \le T + \tau_1$, то оптимальна на цьому інтервалі оцінка (5) набуває вигляду:

$$\hat{R}_{опт}(\tau) = \frac{1}{T+\tau_1-\tau} \int_0^{T+\tau_1-\tau} x(t)x(t+\tau)dt. \qquad (7)$$

Вона також має мінімальну дисперсію. Різниця між оцінками (6) і (7), в сенсі оптимальності, буде незначною при $\tau_1 << T$.

Висновки. Отже, запропоновані математичні співвідношення (1) – (6) є узагальненою математичною моделлю оптимальної оцінки спектральної щільності потужності випадкових сигналів для контролю технічного стану двигунів засобів водного транспорту.

Список літератури

1. Малиновский М. А., Фока А. А., Ролинский В. И. Обеспечение надежности судовых дизелей на эксплуатационных и особых режимах работы. Одесса: Феникс, 2007. 152 с.

2. Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. М.: Наука, 2006. 40 с.

3. Пахомов Ю. А. Судовые энергетические установки с двигателями внутреннего сгорания. М.: ТрансЛит, 2007. 528 с.

4. Петухов В. С., Соколов В. А. Диагностика состояния электродвигателей. Метод спектрального анализа потребляемого тока. *Новости ЭлектроТехники*. 2005. № 1(31). С. 50–52.

5. Поспелов Д. А. Ситуационное управление и практика. М.: Наука. 1986. 288 с.